

TNA001 - FÖ 3 Kap 1.4 (fr.o.m. sid. 27), Kap 1.5 (t.o.m. sid 33)

1.4 Allmänna polynomekvationer

a) Vad menas med ett *polynom* och en *polynomekvation*?

b) Vad menas med *polynomdivision*? Vi illustrerar med ett exempel.

Exempel 12

Skriv det rationella uttrycket $\frac{2x^3 - 3x^2 - 27}{x^2 - 9}$ som en summa av ett polynom och ett rationellt uttryck.

c) *Faktorsatsen* (Sats 1.2 sid. 28 i FN)

Exempel 13

a) Faktorisera i förstagsfaktorer polynomet $16 + 20x + 2x^2 - 2x^3$.

b) Bestäm rötterna till polynomekvationen $16 + 20x + 2x^2 - 2x^3 = 0$ (tredjegradekvation).

Anm: På föreläsningen kommer vi att först lösa a)-uppgiften och sedan, med hjälp av denna, dra slutsatser om b)-uppgiften.

Nedan följer en fullständig lösning till Ex 13b), utan att vi först gjort a). I lösningen ingår en polynomdivision som dock inte redovisas här. Lägg märke till att vi, då vi löser den uppkomna andragradsekvationen, dividerar med faktorn -2 , som ju förstås skall finnas med i lösningen till a)-uppgiften!

Ex 13 b) Bestäm rötterna till polynomekvationen $16 + 20x + 2x^2 - 2x^3 = 0$

Låt $p(x) = 16 + 20x + 2x^2 - 2x^3$. Vi ser (prövning) att $x = -1$ är en lösning till ekvationen, d.v.s.

$p(-1) = 0$. Då är, enligt faktorsatsen, $x - (-1) = x + 1$ faktor i p . Alltså kan vi skriva den givna ekvationen

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)k(x) = 0$$

Genom polynomdivisionen $\frac{p(x)}{x+1} = k(x)$ (visas alltså inte här) får vi $k(x) = -2x^2 + 4x + 16$ och därmed ges ev. övriga lösningar till den givna ekvationen av villkoret

$$-2x^2 + 4x + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \text{[kvadratkomplettera]}$$

$$(x - 1)^2 - 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow$$

$$x = -2 \text{ eller } x = 4$$

Svar: Ekvationen har lösningarna $x = -1$, $x = -2$ eller $x = 4$.

1.5 Olikheter

- a) Vi illustrerar hur man bestämmer **lösningsmängden till olikheter** med hjälp av ett par exempel.

Exempel 14

Lös olikheten

a) $\frac{3}{x-1} \leq -\frac{2}{x}$

b) $x^2 > 5$

c) $2x^2 + 1 > 3x$

c) Vi flyttar över och faktorerar, vilket ger

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 1 > 3x &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] > 0 \\
 &\Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{8}{16}\right] > 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] > 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] > 0 \Leftrightarrow [\text{konjugatregeln}] \\
 &\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) > 0.
 \end{aligned}$$

Teckenstudium:

| | | | | | |
|--|---|---------------|---|---|---|
| | | $\frac{1}{2}$ | | 1 | |
| 2 | + | + | + | + | + |
| $x - \frac{1}{2}$ | - | 0 | + | + | + |
| $x - 1$ | - | - | - | 0 | + |
| $2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ | + | 0 | - | 0 | + |

Vilket ger lösningsmängden $x \in L =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, \infty[$.

Svar: Olikheten har lösningsmängden $x \in L =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, \infty[$.

Vad menas med en fullständig lösning?

(Se även kursinformationen!)

Exempel 15

Om vi har till uppgift (Ex 14b) att bestämma lösningsmängden till olikheten $\frac{3}{x-1} \leq -\frac{2}{x}$ kan en fullständig lösning se ut på följande sätt:

- Vi flyttar alla termer till VL. För den givna olikheten har vi

$$\frac{3}{x-1} \leq -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x+2(x-1)}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2x-2}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{x(x-1)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5\left(x-\frac{2}{5}\right)}{x(x-1)} \leq 0$$

Gör liknämngt

Faktorisera

- Vi använder ett **teckenschema** för att studera det sista stegets olikhet:

| | | | | | |
|--|---|---------------|---|---|-----------------|
| | 0 | $\frac{2}{5}$ | 1 | | $\rightarrow x$ |
| 5 | + | + | + | + | + |
| $x - \frac{2}{5}$ | - | - | 0 | + | + |
| x | - | 0 | + | + | + |
| $x-1$ | - | - | - | - | 0 |
| $\frac{5\left(x-\frac{2}{5}\right)}{x(x-1)}$ | - | Ej def. | + | 0 | - |
| | | | | | Ej def. |
| | | | | | + |

- Eftersom alla olikheter ovan är ekvivalenta så har vi av teckenschemat att den ursprungliga (givna) olikheten gäller för $x \in L =]-\infty, 0[\cup \left[\frac{2}{5}, 1\right[$.

- **Kontroll:** Vi prövar med att sätta in några *lämpliga* x -värden i den ursprungliga (givna) olikheten

$$x = -1: \text{VL} = \frac{3}{-1-1} = -\frac{3}{2}, \quad \text{HL} = -\frac{2}{-1} = 2 \quad \text{Alltså har vi VL} \leq \text{HL}$$

$$x = \frac{1}{5}: \text{VL} = \frac{3}{\frac{1}{5}-1} = \frac{3}{-\frac{4}{5}} = -\frac{15}{4}, \quad \text{HL} = -\frac{2}{\frac{1}{5}} = -10 \quad \text{Alltså har vi VL} > \text{HL}$$

$$x = \frac{2}{5}: \text{VL} = \frac{3}{\frac{2}{5}-1} = \frac{3}{-\frac{3}{5}} = -5, \quad \text{HL} = -\frac{2}{\frac{2}{5}} = -5 \quad \text{Alltså har vi VL} \leq \text{HL}$$

$$x = \frac{4}{5}: \text{VL} = \frac{3}{\frac{4}{5}-1} = \frac{3}{-\frac{1}{5}} = -15, \quad \text{HL} = -\frac{2}{\frac{4}{5}} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \quad \text{Alltså har vi VL} \leq \text{HL}$$

- **Svar:** $x \in L =]-\infty, 0[\cup \left[\frac{2}{5}, 1\right[$.